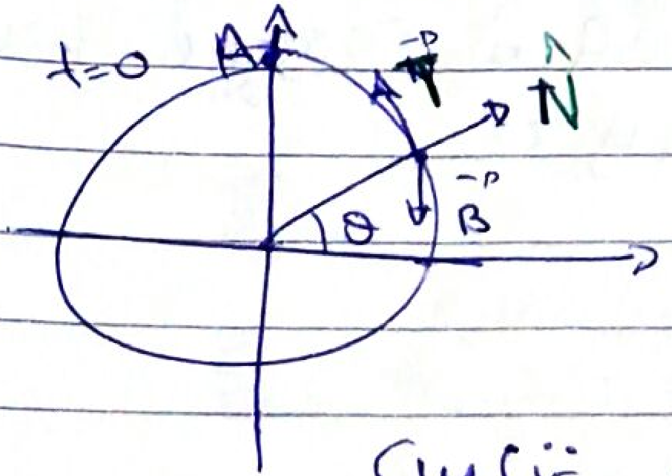
F

<u>4/5/20</u>

<u>Παράδειγμα</u>: Ένα υλικό σημείο μάζας m εκτελεί κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας 6. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην κορυφή του κύκλου και αφήνεται να γλιστρά πάνω στην περιφέρεια του. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο εγκαταλείπει τον κύκλο και την ταχύτητα του στο σημείο αυτό



Γνωρίζουμε ότι:

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{N}$

άρα αν $\vec{F} = m\vec{a}$

$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = N - mg\sin\theta \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\cos\theta \end{cases}$, όμως $r=6$ σταθερά

$\rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} mb(\dot\theta)^2 = N - mg\sin\theta \\ mb\ddot\theta = -mg\cos\theta \times \dot\theta \end{cases} \qquad \frac{1}{2} mb(\dot\theta)^2 = -mg\sin\theta + c \begin{cases} \theta = \pi/2 \\ \dot\theta = 0 \\ c = mg \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} mb(\dot\theta)^2 = N - mg\sin\theta \\ mb(\dot\theta)^2 = 2mg(1-\sin\theta) \end{cases}\right\} \Rightarrow N = mg(3\sin\theta - 2)$$

Το σημείο της αποχώρησης $N = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{3}$

και τότε $mb(\dot\theta)^2 = 2mg\left(1 - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow (\dot\theta)^2 = \frac{2bg}{3}$

και άρα $\vec{v} = \sqrt{\frac{2bg}{3}} \cdot b\,\hat\theta$

Διαγράμματα φάσεως

Όπως είδαμε για την πλήρη μελέτη της κίνησης ενός υλικού σημείου (ας πούμε σε μια διάσταση) χρειάζεται να λύσουμε εξισώσεις της μορφής

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

που εν γένει είναι δύσκολο ή αδύνατον να λυθεί

Σκοπός μας τώρα είναι να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της κίνησης χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε την εξίσωση

Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Δηλαδή θέτουμε $\dot{x} = y$ και

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$$

Το σύστημα δεν περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή και λέγεται αυτόνομο.

Γενικά ένα αυτόνομο σύστημα είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$$

και θεωρούμε τις F, G διαφορίσιμες σε μια περιοχή του επιπέδου xy

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν λύσεις του συστήματος για τις οποίες: $F(x,y) = G(x,y) = 0$ και άρα $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Δηλαδή λύσεις για τις οποίες δεν υπάρχει δυναμική (σταθερές λύσεις)

<u>Ορισμός</u>: Ένα σημείο (x^*, y^*) του συστήματος:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$$

για το οποίο $F(x^*,y^*) = G(x^*,y^*) = 0$ καλείται κρίσιμο ~~σημείο~~ σημείο και η αντίστοιχη λύση (αν ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες):

$$\begin{cases} x(t) = x^* \\ y(t) = y^* \end{cases} \quad \text{λύση ισορροπίας}$$

Οι λύσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ ορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες Ox, Oy. Το επίπεδο αυτό με κάθετο άξονα Oy και οριζόντιο Ox καλείται χώρος των φάσεων. Δηλ. $\forall t$ ορίζουμε ένα σημείο (x,y) στο χώρο των φάσεων. Για να βρούμε αυτό το χώρο:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

πρέπει να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού

<u>Παράδειγμα</u> Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -ky \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

Το <u>μόνο κρίσιμο σημείο είναι το</u> $(0,0)$. Αν η αρχική συνθήκη είναι: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ τότε δεν έχω δυναμική όλα παραμένουν 0

η λύση του συστήματος είναι:

$$x(t) = x_0 e^{-t} \quad , \quad y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Αν $x_0 = y_0 = 0$ τότε βρισκόμαστε στο κρίσιμο σημείο που είναι και σημείο ισορροπίας. Για $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$

$$y = y_0 e^{-kt} = y_0 (e^{-t})^k = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^k = \frac{y_0}{x_0^k} x^k = b x^k$$

Δηλαδή:

$$y = b x^k \quad , \quad b = \frac{y_0}{x_0^k}$$

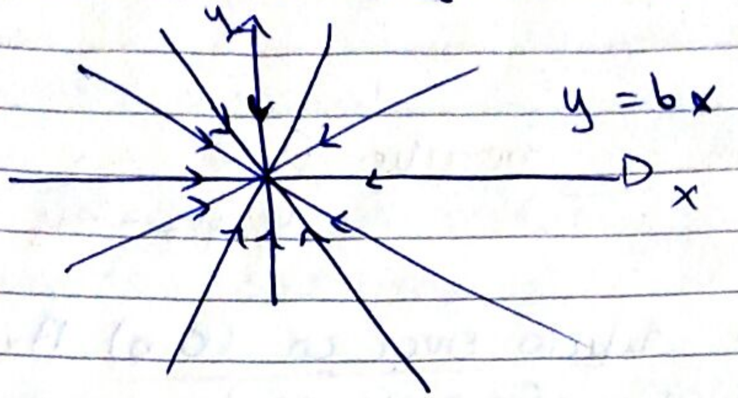
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) $k > 0$: Παρατηρούμε ότι $\forall k > 0$:

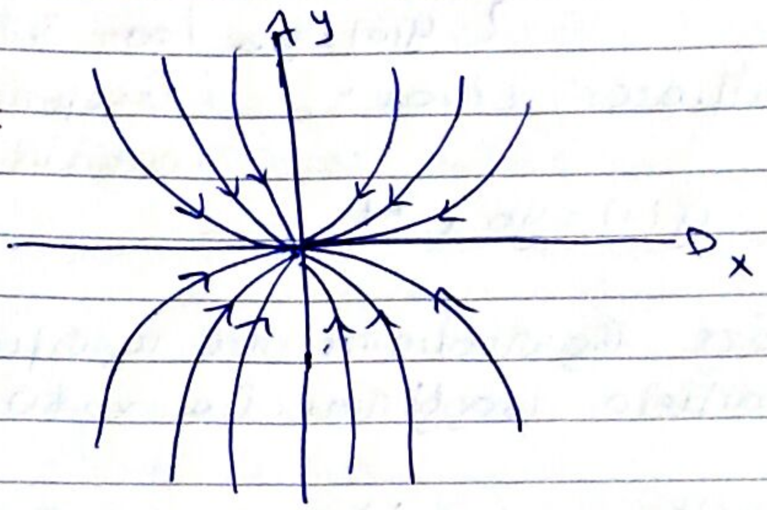
$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

δηλ. η λύση τείνει πάντα προς το κρίσιμο σημείο. Το σημείο ισορροπίας είναι σημείο συσσώρευσης. Ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζει το $(0,0)$ εξαρτάται από το k και τις διάφορες τιμές του. Αυτές οι καμπύλες δημιουργούν το διάγραμμα φάσης

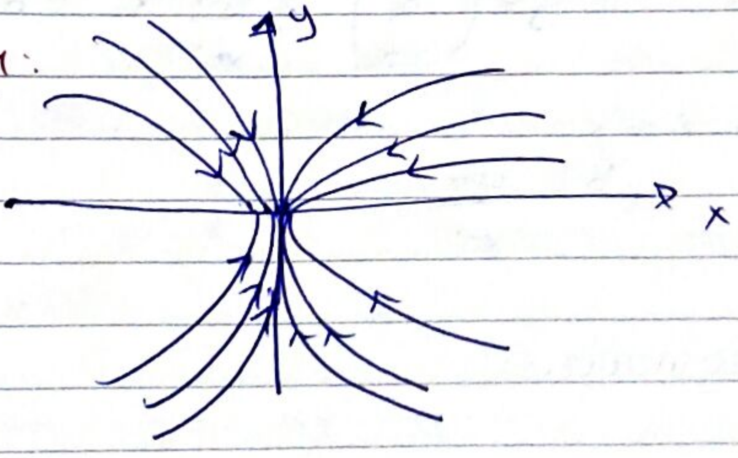
$\kappa = 1$: Οι ευθείες $y = bx$



$\kappa > 1$:

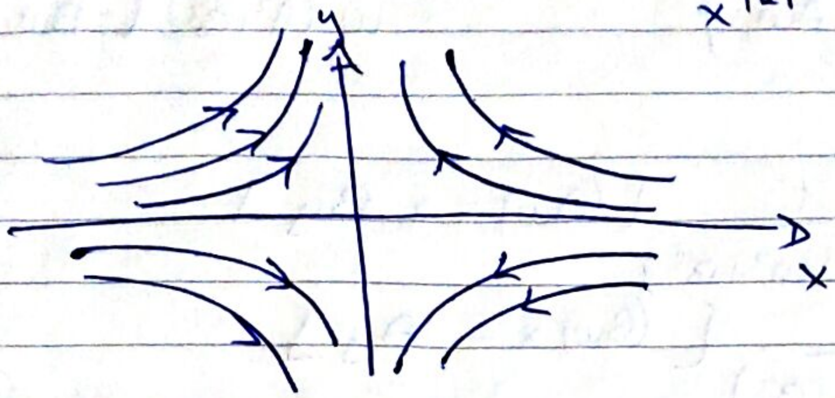


$0 < \kappa < 1$:



Γι αυτή τη συμπεριφορά λέμε ότι το σημείο $(x^*, y^*) = (0,0)$ είναι κόμβος. Ο κόμβος είναι σημείο συσσώρευσης αν οι φασματικές γραμμές έχουν φορά προς το σημείο αυτό και πηγή αν έχουν φορά εκτός απ' αυτό.

2) $k<0$: $y = b\, x^{-|k|} = \dfrac{b}{x^{|k|}}$



Το σημείο (x^*, y^*) καλείται σαγματικό σημείο

<u>Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής</u>

Θεωρούμε υλικό σημείο μάζας m που ταλαντώνεται σε ένα ελατήριο και ικανοποιεί το νόμο του Hooke.

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

Γράφουμε την εξίσωση ως σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
$$y(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B\omega & -A\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Αν $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B\omega & -A\omega \end{pmatrix}$ τότε $C^{-1} = \frac{-1}{\omega(A^2+B^2)} \begin{pmatrix} -A\omega & -B \\ -B\omega & -A \end{pmatrix}$

Δηλαδή:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega(A^2+B^2)} \left[(A\omega)x + By \right]$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{\omega(A^2+B^2)} \left[(B\omega)x - Ay \right]$$

Όμως $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(A\omega)x + By \right]^2 + \left[(B\omega)x - Ay \right]^2 = \omega^2 (A^2+B^2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A^2+B^2)\omega^2 x^2 + (A^2+B^2) y^2 = \omega^2 (A^2+B^2)^2 \Leftrightarrow$

$\omega^2 x^2 + y^2 = \omega^2 (A^2+B^2) \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{\omega^2} y^2 = A^2+B^2$

Άρα:

$$x^2 + \frac{1}{\omega^2} (\dot{x})^2 = A^2 + B^2$$

Δηλ. η εξίσωση περιγράφει ελλείψεις! Κλειστές τροχιές γύρω από ένα κέντρο

Παρατήρηση Έστω ότι $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = \dot{x}(0) = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = x_0 \\ B\omega = y_0 \end{array} \right.$

Άρα:

$x^2 + \frac{1}{\omega^2} (\dot{x})^2 = x_0^2 + \frac{1}{\omega^2} y_0^2$ και η ποσότητα

$x^2 + \frac{1}{\omega^2} (\dot{x})^2$ διατηρείται

Παρατήρηση: Το διάγραμμα φάσης είναι ελλειπτικό

Δηλ. αν μετακινηθώ πάνω σε μια τροχιά σε περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ θα έχω πάλι ίδια θέση και ίδια ταχύτητα. Άρα εκτελώ ταλάντωση γύρω από ένα σημείο ισορροπίας.

Ερώτηση: Μπορώ να εξάγω τέτοια συμπεράσματα χωρίς να χρειαστεί να λύσω πλήρως το σύστημα?
Πώς συνδέονται οι εξισώσεις, τα διαγράμματα φάσης και οι σταθερές ολοκλήρωσης με τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος?

Αυτόνομες εξισώσεις

Ορισμός: Αυτόνομη εξίσωση/σύστημα είναι η εξίσωση στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν εμφανίζεται σε κανένα όρο της.

Παράδειγμα: Η εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ είναι αυτόνομη ενώ η $\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos(\omega t)$ δεν είναι.
Θα εστιάσουμε στις εξισώσεις του τύπου:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

Μια άμεση και σημαντική λύση της εξίσωσης είναι η λύση ισορροπίας για την οποία:

$$f(x,0,t)=0$$

Δηλ.

$$\dot{x}=\ddot{x}=0$$

Συνήθως τέτοιου είδους λύσεις εμφανίζονται μόνο σε αυτόνομα συστήματα. Εστιάζουμε εδώ σε αυτόνομα συστήματα/εξισώσεις.

Θεωρούμε συνεπώς εξισώσεις που μπορεί να έχουν σχέση με το νόμο του Newton, δηλ. της μορφής:

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x})$$

Οι σταθερές λύσεις (τα πιθανά σημεία ισορροπίας) είναι $f(x,0)=0$

Παράδειγμα: Η εξίσωση $\ddot{x}=(1-x^2)+x\dot{x}$ έχει σταθερές λύσεις: τις $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Γράφουμε την εξίσωση ως σύστημα εξισώσεων θέτοντας $\dot{x}=y \Rightarrow \dot{y}=\ddot{x}$

Δηλαδή $\ddot{x}=f(x,\dot{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=f(x,y) \end{cases}$

Τελικά δημιουργούμε την αυτόνομη εξίσωση 1ης τάξης:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{f(x,y)}{y}$$

Παράδειγμα Η εξίσωση $\ddot{x} + a\sin x = 0$
Δημιουργούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -a\sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin x \end{cases}$$

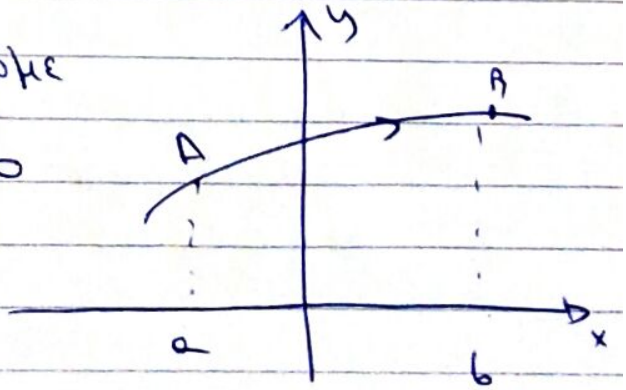
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{a\sin x}{y} \Leftrightarrow y\,dy + a\sin x\,dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} - a\cos x = C$$

Οι σταθερές λύσεις προκύπτουν αν $\begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = -a\sin x = 0 \end{cases}$

Παρατήρηση: (α) Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται πάντα στον οριζόντιο άξονα
(β) κλειστές καμπύλες στα φασματικά διαγράμματα αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις μιας και μια αρχική κατάσταση επαναλαμβάνεται συνεχώς στο χρόνο
(γ) Τα σημεία ισορροπίας που περιβάλλονται από κλειστές καμπύλες στον χώρο των φάσεων είναι ευσταθή

Χρόνος μετάβασης
Έστω ότι θέλουμε να ~~μεταφέρουμε~~ μεταβούμε από το σημείο Α στο Β στο φασικό χώρο. Ο χρόνος που χρειαζόμαστε γι' αυτή τη μετάβαση είναι:



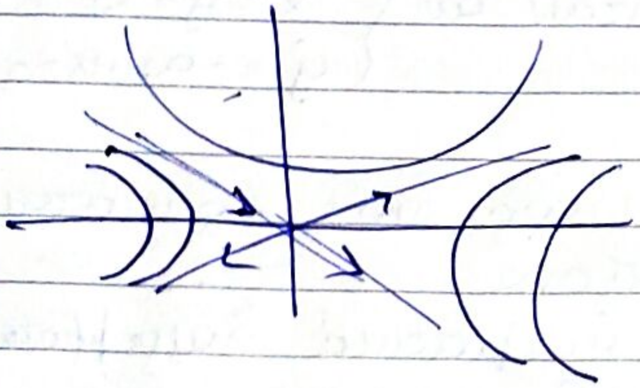
$$T_{AB} = \int_C dt = \int_C \frac{\dot{x}}{\dot{x}}\,dt = \int_C \frac{\dot{x}\,dt}{\dot{x}} = \int_C \frac{dx}{dy}$$

Παράδειγμα Οι εξισώσεις $\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \end{cases}$

Την 1η την έχουμε ήδη μελετήσει και γνωρίζουμε ότι στον φασικό χώρο είναι Ελλείψεις. Για τη 2η έχουμε:

$$\left.\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = \omega^2 x \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\omega^2 x}{y} \Leftrightarrow y\,dy - \omega^2 x\,dx = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - \omega^2 x^2 = c$$



είναι υπερβολές

Παρατηρήσεις (α) Εδώ το σημείο ισορροπίας $(x,y) = (0,0)$ είναι ασταθές. Οι φασματικές γραμμές απομακρύνονται απ' αυτό

(β) Οι ασύμπτωτες είναι οι $y = \pm \omega x$

(γ) Προφανώς δε μπορούμε να μιλήσουμε για περιοδική κίνηση

Άσκηση: Λύνοντας την εξίσωση $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ να δείξετε ότι ο φασικός χώρος είναι υπερβολές